ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2025
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη Σχολικού Βιβλίου

Α2. Απόδειξη Σχολικού Βιβλίου

Α3. Απόδειξη Σχολικού Βιβλίου

Α4. α. ΣΩΣΤΟ

β. ΛΑΘΟΣ

γ. ΛΑΘΟΣ

δ. ΛΑΘΟΣ

Αιτιολόγηση του (δ) :

ΘΕΩΡΩ $f : y = f(x) = \frac{1}{x}, x \in \Re - \{0\}$

Έστω $f'(x) = (\frac{1}{x})' = \frac{-1}{x^2} < 0$ για κάθε $x \in \Re - \{0\}$ η f ΔΕΝ είναι γνήσια φθίνουσα διότι

$-3 < 2 \Rightarrow f(-3) < f(2)$.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Θέτουμε $y = e^x - 1 \Leftrightarrow e^x = y+1, y > -1 \Leftrightarrow x = \ln(y+1), y > -1$

με αντικατάσταση έχουμε $g(y) = e^{\ln(y+1)} - \ln(y+1) + 1 \Leftrightarrow g(y) = y - 2 - \ln(y+1), y > -1$

Β2. Παρατηρούμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και gof έχουν κοινό σημείο Α(0,2)

Έχουμε ότι $g'(x) = \frac{x}{x+1}$

Άρα $g'(0) = 0$, η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο Α έχει εξίσωση

$y - g(0) = g'(0)(x-0) \Leftrightarrow y = 2$.

Ομοίως βρίσκουμε την εξίσωση της γραφικής παράστασης της gof στο σημείο Α , η οποία είναι η $y = 2$.

Άρα έχουν κοινή εφαπτομένη.

Β3. Έχουμε ότι $g'(x)=\dfrac{x}{x+1}$

Άρα $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

$g'(x)>0 \Leftrightarrow x>0$

$g'(x)<0 \Leftrightarrow x<0$

Δηλαδή η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0]$,

η g είναι συνεχής στο 0 άρα στη θέση $x=0$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $g(0)=2$.

Επίσης $g''(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}>0$, άρα η g είναι κυρτή στο $(-1,+\infty)$

Ασύμπτωτες :

$\lim\limits_{x\to -1} g(x)=+\infty$ άρα η ευθεία $x=-1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{g(x)}{x}=1=\lambda$

$\lim\limits_{x\to +\infty} [g(x)-\lambda x]=-\infty$, άρα δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

Β4. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $e^{g(x)-2}=(g(x)-2)+1$, από τη γνωστή ανισότητα $e^x \geq x+1,\ x\in\Re$ με την ισότητα να ισχύει για $x=0$.

Άρα $g(x)-2=0 \Leftrightarrow g(x)=2 \Leftrightarrow x=0$, αφού στη θέση $x=0$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $g(0)=2$.

<u>**ΘΕΜΑ Γ**</u>

Γ1. Η συνάρτηση της ταχύτητας είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού άρα $\upsilon(t)=0 \Leftrightarrow t=4$, t = 6

t	0		4		6		8
υ(t)		+		-		+	

Η ταχύτητα μηδενίζεται τις χρονικές στιγμές $t=4$, t = 6

Στο χρονικό διάστημα $(4,6)$ η ταχύτητα είναι αρνητική, άρα το κινητό κινείται προς τα αριστερά.

Στα χρονικά διαστήματα $(0,4)$ και $(6,8)$ η ταχύτητα είναι θετική άρα το κινητό κινείται προς τα δεξιά.

Γ2. Η ταχύτητα αυξάνεται όταν η επιτάχυνση είναι θετική και αντίστοιχα μειώνεται όταν η επιτάχυνση είναι αρνητική .

Γνωρίζουμε ότι $\alpha(t)=\upsilon'(t)$

Άρα $\alpha(t)=6t-30$

$\alpha(t)=0 \Leftrightarrow 6t-30=0 \Leftrightarrow t=5$

$\alpha(t)>0 \Leftrightarrow 5<t<8$

$\alpha(t)<0 \Leftrightarrow 0<t<5$

Άρα η ταχύτητα αυξάνεται στο διάστημα $(5,8)$ και μειώνεται στο $(0,5)$

Γ3. Έστω S(t) η συνάρτηση που μας δίνει τη θέση του κινητού τη χρονική στιγμή t.

Η μετατόπιση τις χρονικές στιγμές αυτές είναι $S(7)-S(5)$.

Γνωρίζουμε ότι $\upsilon(t)=S'(t)$ και επειδή ψάχνουμε τα συνολικά μέτρα μεταξύ των χρονικών στιγμών αυτών έχουμε : $S(7)-S(5)=\int_5^7 \upsilon(t)dt=\int_5^7 (3t^2-30t+72)dt=\left[t^3-15t^2+72t\right]_5^7=2$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\int_{a+1}^{a+2}\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln(a+5)-a^2 \overset{a>-2}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (\ln f(x))_{a+1}^{a+2}=\ln(a+5)-a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln f(a+2)-\ln(a+1)=\ln(a+5)-a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln[(a+3)\cdot(a+4)\cdot(a+5)]-\ln[(a+2)\cdot(a+3)\cdot(a+4)]=\ln(a+5)-a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(a+5)-\ln(a+2)=\ln(a+5)-a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(a+2)-a^2=0$$

<u>ΘΕΩΡΟΥΜΕ</u> $Q(a)=\ln(a+2)-a^2, a>-2$

- Η Q είναι ΣΥΝΕΧΗΣ στο $(-2,+\infty)$

$\lim_{a\to -2} Q(a)=-\infty$ $\qquad Q(0)=\ln 2>0$

Άρα η $Q(a)=0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(-2,0)$

$Q(0)=\ln 2>0$ $\qquad Q(2)=\ln 4-4<0$ (διότι : $\ln x<x$, για κάθε $x>0$)

Άρα η $Q(a)$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(0,2)$ αν η $(\varepsilon): Q(a)=0$ έχει και μια τρίτη λύση τότε η $Q''(a)=0$ θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα, όμως $Q''(a)=-\frac{1}{(a+2)^2}<0$, $a\in(-2,+\infty)$

Άρα $Q''(a)\neq 0$, $a\in(-2,+\infty)$

Άρα η εξίσωση $Q(a)=0$ έχει δύο ακριβώς λύσεις στο $(-2,+\infty)$

Δ2. $g(x)=\frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow g(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}$, $x>-1$

Τότε $g'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x+3)^2} < 0 \ ,\ x > -1$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,+\infty)$ επίσης

$$g'(x) = \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = \frac{f''(x)\cdot f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x)\cdot f(x) - (f'(x))^2 < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f'(x))^2 > f''(x)\cdot f(x), x > -1$$

Για $x=-1$ έχω $\left\{ \begin{array}{l} (f'(-1))^2 > 0 \\ f(-1)\cdot f''(-1) = 0 \end{array} \right\}$

$\Rightarrow$ για $x=-1$ ισχύει $(f'(-1))^2 > f(-1)\cdot f''(-1)$

άρα $(f'(x))^2 \geq f''(x)\cdot f(x) \ ,\ x \geq -1$

Δ3. $(f'(x))^2 \geq f(x)\cdot f''(x),\ x \geq -1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{0} (f'(x))^2 dx > \int_{-1}^{0} f(x)\cdot f''(x) dx \xRightarrow[\text{ολοκλήρωση}]{\text{παραγοντική}}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{0} (f'(x))^2 dx > f(0)\cdot f'(0) - f(-1)\cdot f'(-1) - \int_{-1}^{0} (f'(x))^2 dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot \int_{-1}^{0} (f'(x))^2 dx > 66 \Rightarrow \int_{-1}^{0} (f'(x))^2 dx > 33$$

Δ4. Αν $a=0$ η εξίσωση γίνεται $f(x)=0$ η οποία έχει λύση την $x=-1$

Αν $a \neq 0$ το $x=-1$ ΔΕΝ αποτελεί λύση της εξίσωσης διότι:

$f(-1) - a\cdot f'(-1) = 0 \Rightarrow a\cdot f'(-1) = 0$ (ΑΤΟΠΟ)

Άρα $f(x) - a\cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{a} \ ,\ x > -1$

Η g είναι γνήσια φθίνουσα στο $(-1,+\infty)$ με $\lim_{x\to -1} g(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to +\infty} g(x) = 0$

άρα το σύνολο τιμών της g είναι το $(0,+\infty)$

οπότε αν $\frac{1}{a} < 0 \Leftrightarrow a < 0$ η εξίσωση είναι ΑΔΥΝΑΤΗ

ενώ αν $\frac{1}{a} > 0 \Leftrightarrow a > 0$ η εξίσωση έχε ακριβώς μια λύση.

Επιμέλεια: Από την ομάδα των Μαθηματικών μας