

**ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ  
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ  
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2025  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών. (Μονάδες 6)
- A2.** Πότε μια συνάρτηση ονομάζεται '1-1' στο πεδίο ορισμού της; (Μονάδες 4)
- A3.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[α,β]$ ; (Μονάδες 5)
- A4.** Να χαρακτηριστούν ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ) οι παρακάτω προτάσεις :
- α. Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της είναι και συνεχής σε αυτό.
- β. Αν  $f(x) = \sqrt{x}, x \in [0, +\infty)$  τότε ισχύει  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x \in [0, +\infty)$ .
- γ. Αν  $f, g$  συνεχείς συναρτήσεις στο  $\mathbb{R}$  με  $f(x) > g(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  τότε ισχύει:  
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$
 για κάθε  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .
- δ. Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x$  του πεδίου ορισμού της τότε πάντα ισχύει ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό. (Μονάδες 2+2+2+4)

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $g \circ f, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , με τύπους

$$(g \circ f)(x) = e^x - x + 1 \text{ και } f(x) = e^x - 1$$

- B1.** Να προσδιορίσετε την συνάρτηση  $g$ . (Μονάδες 7)
- B2.** Αν  $g(x) = x + 2 - \ln(x + 1), x > -1$ , να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $C_g$  και  $C_{g \circ f}$  έχουν κοινή εφαπτομένη την  $y = 2$  (Μονάδες 6)
- B3.** Να μελετήσετε την συνάρτηση  $g$  ως προς τη μονotonία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $C_g$ , αν υπάρχουν. (Μονάδες 7)

**B4.** Να εξετάσετε αν η εξίσωση  $e^{g(x)} = e^2(g(x) - 1)$  έχει λύση στο  $(-1, +\infty)$

(Μονάδες 5)

### ΘΕΜΑ Γ

Η ταχύτητα ενός κινητού πάνω σε άξονα τη χρονική στιγμή  $t$  δίνεται από τη συνάρτηση

$$v(t) = 3t^2 - 30t + 72, 0 \leq t \leq 8$$

**Γ1.** Πότε το κινητό κινείται προς τα δεξιά και πότε προς τα αριστερά;

(Μονάδες 8)

**Γ2.** Πότε η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται και πότε μειώνεται;

(Μονάδες 9)

**Γ3.** Να βρεθεί η μετατόπιση του κινητού το χρονικό διάστημα  $t_1 = 5$  έως  $t_2 = 7$ .

(Μονάδες 8)

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο :  $y = f(x) = (x+1)(x+2)(x+3), x \in \mathfrak{R}$

**Δ1.** Ναδειχθεί ότι η εξίσωση :  $\int_{a+1}^{a+2} \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(a+5) - a^2, a \in (-2, +\infty)$  έχει ακριβώς δύο (2) ρίζες.

(Μονάδες 8)

Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση  $g$  με τύπο :  $y = g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}, x \in (-1, +\infty)$

**Δ2.** Ναδειχθεί ότι η  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα και στη συνέχεια ότι :

$$(f'(x))^2 \geq f(x) \cdot f''(x), \text{ για κάθε } x \in [-1, +\infty).$$

(Μονάδες 3+3)

**Δ3.** Ναδειχθεί ότι :  $\int_{-1}^0 (f'(x))^2 dx > 33$ .

(Μονάδες 5)

**Δ4.** Για τις διάφορες τιμές του  $a \in \mathfrak{R}$  να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης :

$$f(x) - a \cdot f'(x) = 0, x \in [-1, +\infty)$$

(Μονάδες 6)